第２講　場合の数と確率

1　次の空欄を埋めよ.

［1］ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 7 個の数字から異なる 3 個の数字を選び，それらを 1 個ずつ使って 3 桁の整数を作る．そのような整数の中で，偶数は全部で **アイウ** 個あり，246 以下の偶数は全部で **エオ** 個ある.

［2］ さいころを 3 回投げ，出た目を順に a, b, c とする.

このとき，a, b, c の最大値が 4 となる確率は □ である.

積 abc が 3 の倍数である確率は □ である.

また，$100a+10b+c$ が 3 の倍数である確率は □ である.

［3］ 1 から 6 までの番号が書かれた 6 枚のカードがある．6 枚すべてを 1 列に並べるとき，前半 3 枚の数の和が後半 3 枚の数の和より小さい並べ方は □ 通りある．また，奇数が少なくとも 1 箇所は連続するか，または，偶数が少なくとも 1 箇所は連続するような並べ方は □ 通りある.

2　サイコロを２回振り，１回目に出る目の数を a，２回目に出る目の数を b とおき，$c=4(a+b)$ とする．このとき，xy 平面上に頂点が $(a,\ c)$ で点 $(0,\ c-a^2)$ を通る，上に凸な放物線 $P_1：y=f(x)$ と，頂点が $(-b,\ 0)$ で点 $(0,\ b^2)$ を通る，下に凸な放物線 $P_2：y=g(x)$ をおく．以下の問に答えよ．

(1)　関数 $f(x)$ および $g(x)$ を a，b を用いて表せ．

(2)　P_1 と P_2 が異なる２点で交わらない確率を求めよ．

P_1 と P_2 が異なる２つの交点をもつとき，交点の x 座標をそれぞれ α，β とおく．

(3)　$\alpha\beta<0$ のとき，a，b が満たす関係式を求めよ．

(4)　$\alpha\beta<0$ となる確率を求めよ．

3

[1]　袋の中に2，3，5，7の数字が書かれた球が1つずつ入っている．この袋から無作為に1つの球を取り出し袋の中に戻す操作を4回行う．この4回の試行のうちk回目に取り出された球に書かれた数字をA_kとし，$X=A_1\times A_2\times A_3\times A_4$とする．たとえば，取り出された球に書かれた数字が順に7，2，2，5であったとき，Xは$7\times2\times2\times5=140$となる．この$X$について，次の問に答えよ．

(1)　Xが奇数になる確率を求めよ．

(2)　Xが5の倍数になる確率を求めよ．

(3)　Xが10の倍数になる確率を求めよ．

[2]　次の［　　］に適する数を埋めよ．

ある手品用の硬貨を1枚投げたとき，表の出る確率は$\frac{3}{4}$，裏の出る確率は$\frac{1}{4}$である．この手品用の硬貨を2枚投げたとき，表がちょうど1枚出る確率は$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$である．

この手品用の硬貨6枚と普通の硬貨3枚が入った袋から，同時に2枚の硬貨を取り出して投げる試行を考える．ただし，普通の硬貨を1枚投げたとき，表の出る確率，裏の出る確率はともに$\frac{1}{2}$である．取り出した硬貨が2枚とも手品用の硬貨であって，かつ表がちょうど1枚出る確率は$\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$である．また，表がちょうど1枚出る確率は$\frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{クケ}}}$である．表がちょうど1枚出たとき，表になっている硬貨が手品用の硬貨である確率は$\frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$である．

第２講　場合の数と確率

1 [1] 3 桁の偶数となるのは

1 の位が 0 のとき

100，10 の位は 1～6 から異なる 2 個を取り出す順列の総数で $_6P_2=30$ 通り

1 の位が 2 のとき

100, 10 の位は 2 以外の 6 個から異なる 2 個を取り出す順列のうち，100 の位が 0 になるものを除く $5\times5=25$ 通り

1 の位が 4，6 のときも同様に 25 通り

よって，3 桁の偶数は $30+25\times3=105$ 個

246 以下の偶数となるのは

100 の位が 1 のとき

1 の位は 0，2，4，6 の 4 通り，10 の位は 5 通り．よって，$4\times5=20$ 通り

100 の位が 2 のとき

10 の位が 0 のとき，1 の位は 4，6 の 2 通り

10 の位が 1，3 のとき，1 の位は 0，4，6 の 3 通り

10 の位が 4 のとき，1 の位は 0，6 の 2 通り

よって，246 以下の偶数は $20+2+2\times3+2=30$ 個

[2] 出る目のすべての場合の数は 6^3 通り

a，b，c の最大値が 4 となるのは

(a，b，c がすべて 4 以下)－(a，b，c がすべて 3 以下)$=4^3-3^3=37$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{37}{6^3}=\dfrac{37}{216}$

積 abc が 3 の倍数である事象の余事象は，a，b，c がすべて 3 の倍数でない場合で，4^3 通り

よって，求める確率は $1-\dfrac{4^3}{6^3}=\dfrac{19}{27}$

$100a+10b+c$ が 3 の倍数である事象は，$a+b+c$ が 3 の倍数である事象に等しい．

$a+b+c$ が 3 の倍数である組合せは

(1，1，1)，(1，1，4)，(1，2，3)，(1，2，6)，(1，3，5)，(1，4，4)，(1，5，6)，
(2，2，2)，(2，2，5)，(2，3，4)，(2，4，6)，(2，5，5)，(3，3，3)，(3，3，6)，
(3，4，5)，(3，6，6)，(4，4，4)，(4，5，6)，(5，5，5)，(6，6，6)

これらの順列を考えて，$3!\times8+\dfrac{3!}{2!}\times6+1\times6=72$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{72}{6^3}=\dfrac{1}{3}$

[3] 6 枚のカードの数の和は $1+2+3+4+5+6=21$

よって，前半の 3 枚の数の和を x とすると，後半 3 枚の数の和は $21-x$

題意より $x<21-x$　　$x<\dfrac{21}{2}=10.5$　したがって，前半3枚の数の和は10以下.

これを満たす3枚の数の組合せは

(1，2，3)，(1，2，4)，(1，2，5)，(1，2，6)，(1，3，4)，

(1，3，5)，(1，3，6)，(1，4，5)，(2，3，4)，(2，3，5)

の10通りで，それぞれの順列が3! 通りある.

また，そのそれぞれについて，後半の3枚の数の順列が3! 通りある.

よって，前半の3枚の数の和が，後半の3枚の数の和より小さい並べ方は，

$10\times 3!\times 3!=360$ 通り

奇数が少なくとも1箇所は連続するか，または，偶数が少なくとも1箇所は連続する事象の余事象は，奇数も偶数も連続しない場合であり，それは偶数と奇数が交互に並ぶ場合である.

奇数を3枚並べる並べ方が3! 通り，偶数を3枚並べる並べ方が3! 通り

偶数と奇数が交互に並ぶ方法は，

「偶奇偶奇偶奇」「奇偶奇偶奇偶」の2通りあるから，

偶数と奇数が交互に並ぶ場合の並べ方は，$3!\times 3!\times 2$ 通り

よって，求める並べ方は，$6!-3!\times 3!\times 2=720-72=648$ 通り

2 (1) 放物線 P_1 は，頂点が $(a,\ c)$ で上に凸であることより，

$f(x)=p(x-a)^2+c$ $(p<0)$ とおける.

これが点 $(0,\ c-a^2)$ を通るので，$pa^2+c=c-a^2$

$pa^2=-a^2$　　$a\neq 0$ より $p=-1(<0)$

これと $c=4(a+b)$ より，$f(x)=-(x-a)^2+4(a+b)$

放物線 P_2 は，頂点が $(-b,\ 0)$ で下に凸であることより，

$g(x)=q(x+b)^2$ $(q>0)$ とおける.

これが点 $(0,\ b^2)$ を通るので，$b^2=qb^2$　　$b\neq 0$ より $q=1(>0)$

よって，$g(x)=(x+b)^2$

(2) P_1 と P_2 の共有点の x 座標は

$-(x-a)^2+4(a+b)=(x+b)^2$ の2解

$2x^2-2(a-b)x+a^2+b^2-4(a+b)=0$ …… ①

P_1 と P_2 が異なる2点で交わらないのは，判別式を D とすると，$D\leqq 0$ のとき

$\dfrac{D}{4}=(a-b)^2-2\cdot\{a^2+b^2-4(a+b)\}\leqq 0$

$(a+b)^2-8(a+b)\geqq 0$

$(a+b)(a+b-8)\geqq 0$

a，b はサイコロの目より，$a+b>0$　　よって，$a+b-8\geqq 0$

ゆえに $8\leqq a+b\leqq 12$　　これを満たす $(a,\ b)$ の組合せは

(2，6)，(3，5)，(3，6)，(4，4)，(4，5)，(4，6)，(5，5)，(5，6)，(6，6)

であり，これらの順列は $6\times 2!+3=15$ 通り

よって，求める確率は $\dfrac{15}{6^2}=\dfrac{5}{12}$

(3) P_1 と P_2 が 2 つの交点をもつとき，(2)より $2\leqq a+b\leqq 7$ のとき

このとき，①の 2 解 α，β について，解と係数の関係より

$$\alpha\beta=\frac{a^2+b^2-4(a+b)}{2}<0$$

よって，a，b が満たす関係式は $a^2+b^2<4(a+b)$，$2\leqq a+b\leqq 7$

(4) (3)より $(a-2)^2+(b-2)^2<8$ かつ $2\leqq a+b\leqq 7$

$a=1,\ 2,\ 3$ のとき $b=1,\ 2,\ 3,\ 4$　　$a=4$ のとき $b=1,\ 2,\ 3$

よって，求める確率は $\dfrac{3\times 4+1\times 3}{6^2}=\dfrac{15}{6^2}=\dfrac{5}{12}$

3 [1] (1) 積 X が奇数になるのは，4 回とも奇数の数が出るとき．

よって，求める確率は $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=\dfrac{81}{256}$

(2) 積 X が 5 の倍数にならないのは，4 回とも 5 以外が出るとき．

よって，求める確率は $1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^4=1-\dfrac{81}{256}=\dfrac{175}{256}$

(3) 積 X が 2 の倍数である事象を B，積 X が 5 の倍数である事象を C とすると，求める確率は

$$P(B\cap C)=1-P(\overline{B\cap C})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})=1-\{P(\overline{B})+P(\overline{C})-P(\overline{B}\cap\overline{C})\}$$

(1)より $P(\overline{B})=\dfrac{81}{256}$，(2)より $P(\overline{C})=\dfrac{81}{256}$

また，$\overline{B}\cap\overline{C}$ は 4 回とも 3 または 7 が出るときで，$P(\overline{B}\cap\overline{C})=\left(\dfrac{2}{4}\right)^4=\dfrac{16}{256}$

よって，求める確率は $1-\left(\dfrac{81}{256}+\dfrac{81}{256}-\dfrac{16}{256}\right)=\dfrac{55}{128}$

[2] 手品用の硬貨を 2 枚投げたとき，表がちょうど 1 枚出る確率は ${}_2C_1\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{8}$

手品用の硬貨 6 枚と普通の硬貨 3 枚が入った袋から同時に 2 枚の硬貨を取り出して投げるときを考える．

取り出した硬貨が 2 枚とも手品用の硬貨であって，かつ表がちょうど 1 枚出る確率は

$$\frac{{}_6C_2}{{}_9C_2}\times\frac{3}{8}=\frac{5}{32}$$

取り出した硬貨が手品用 1 枚，普通の硬貨 1 枚であって，かつ表がちょうど 1 枚出る

確率は $\dfrac{{}_6C_1\cdot{}_3C_1}{{}_9C_2}\times\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{{}_6C_1\cdot{}_3C_1}{{}_9C_2}\times\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{4}$

取り出した硬貨が 2 枚とも普通の硬貨であって，かつ表がちょうど 1 枚出る確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_9C_2}\cdot{}_2C_1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$$

よって，表がちょうど１枚出る確率は $\dfrac{5}{32}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{24}=\dfrac{43}{96}$

表がちょうど１枚出たとき，表になっている硬貨が手品用の硬貨である条件つき確率は

$$\frac{\dfrac{5}{32}+\dfrac{3}{16}}{\dfrac{43}{96}}=\frac{33}{43}$$